

MA2001-1 Cálculo en Varias Variables.**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.**Auxiliares:** Martin Castillo Q. - Pedro Pérez A.

Control 1

5 de septiembre de 2012

P1. Para $N \in \mathbb{N}$ sea $P_N := \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ es polinomio de grado menor o igual a } N\}$. Dado $p \in P_N$ con $p(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i x^i$ se definen las funciones

$$\begin{aligned}\|p\|_1 &:= \sum_{i=0}^N |\alpha_i| \\ \|p\|_2 &:= \max_{i=0, \dots, N} |\alpha_i|\end{aligned}$$

- a) **(1.5 puntos)** Pruebe que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas y que son equivalentes en P_N .
 b) **(3.0 puntos)** Sea $A \in \mathcal{M}_{N+1 \times N+1}$. Sea define la función

$$\begin{aligned}L_A : P_N &\longrightarrow P_N \\ \sum_{i=0}^N \alpha_i x^i &\longrightarrow L_A\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=0}^N \beta_i x^i\end{aligned}$$

donde $A\alpha = \beta$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)^t$ y $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_N)^t$.

Muestre que $\text{Ker}(L_A) = \{p : L_A(p) = 0\}$ es cerrado.

- c) **(1.5 puntos)** Sea ahora $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ Pruebe que $\|p\|_2 \leq \|p\|_1$, pero que no son equivalentes.

Hint: Utilice $p_n(x) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} x^i$.

P2. i) Sea $(E_i, i = 1, \dots, n)$ una familia finita de espacios normados y empleemos la notación común $\|\cdot\|$ para designar la norma de E_i .

- a) **(1.0 puntos)** Demostrar que

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \|x_i\|, \quad \alpha_i > 0$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2}$$

son normas en $E = E_1 \times \dots \times E_n$

- b) **(0.5 puntos)** Utilizar lo anterior para demostrar que

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{(2|x| + |y|)^2 + z^2}$$

es una norma sobre \mathbb{R}^3

- ii) **(1.5 puntos)** Sea el espacio $E = \mathbb{R}^2$, considere la función:

$$N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$$

Demuestre que N es norma y dibuje la bola unitaria.

iii) Considere $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ a \mathbb{R} y la norma:

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

- a) **(1.0 puntos)** Demuestre que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.
- b) **(1.0 puntos)** Demuestre que $\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ es un producto interno.
- c) Considere la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2^n(x - \frac{1}{2}) + 1 & x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^n] \\ 0 & x \in (\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^n, 1] \end{cases}$$

- c.1. **(0.75 puntos)** Demuestre que f_n es de Cauchy con $\|\cdot\|$.
- c.2. **(0.25 puntos)** Concluya que $(V, \|\cdot\|)$ no es de Banach.

P3. i) Estudie el limite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ para cada función:

- a) **(2 puntos)** $f_1(x, y) = \frac{x|y|^\alpha}{x^4 + y^4 + x^2}$, en función de α
- b) **(1 puntos)** $f_2(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4}$
- c) **(1 puntos)** $f_3(x, y) = \frac{y^2(x^3 + y^2) + x^4}{x^4 + y^4}$

ii) Para cada par de funciones señale cual gráfico corresponde a las curvas de nivel respectivas. Especifique cuales representan las curvas de nivel de f y g en cada caso. Debe justificar con desarrollo sus respuestas.

- a) **(0.5 puntos)** $f(x, y) = x + y$ $g(x, y) = x - y$
- b) **(0.5 puntos)** $f(x, y) = 2x + 3y$ $g(x, y) = 2x - 3y$
- c) **(0.5 puntos)** $f(x, y) = x^2 - y$ $g(x, y) = 2y + \ln(|x|)$
- d) **(0.5 puntos)** $f(x, y) = x^2 - y^2$ $g(x, y) = xy$

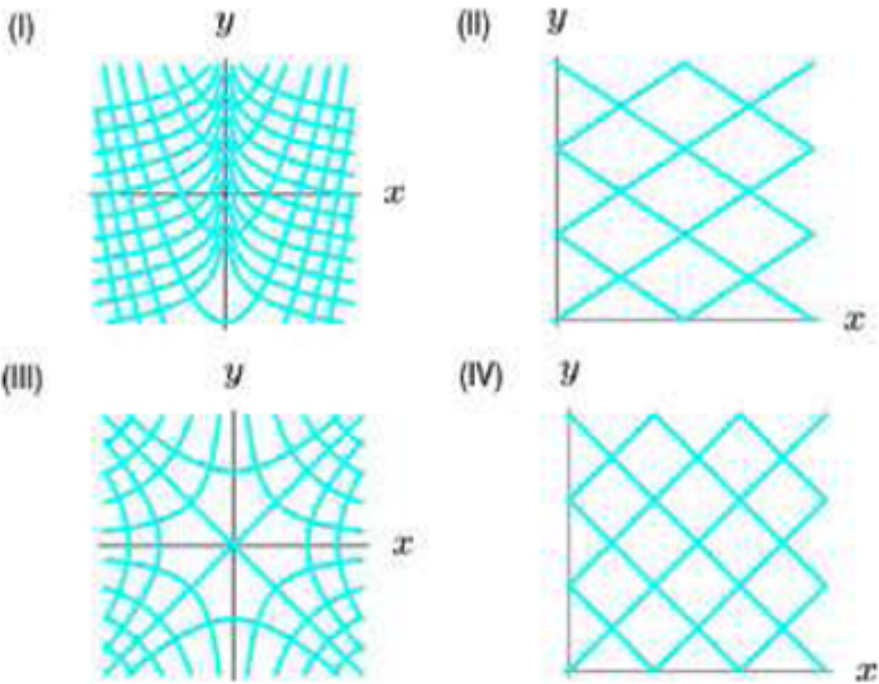


Figura 1:

TIEMPO: 3 HORAS.